MATHEMATIQUES

(OPTION AGRONOMIE - OPTION BIOCHIMIE-BIOLOGIE)

DEUXIÈME COMPOSITION Durée : 3 heures

Soient : r un entier naturel non nul,

$\{a_1, a_2, \ldots a_r\}$ r nombres réels distincts,

$(X_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans l'ensemble $\{a_1, a_2, \ldots a_r\}$, et définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On suppose que :

i) $\forall (i,j) \in \{1, 2, \ldots r\}^2 \cdot \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$,

$P(X_{n+m} = a_j / X_n = a_i)$ est indépendant de n ;

on notera $p_{ij}^{(m)} = P(X_{n+m} = a_j / X_n = a_i)$.

ii) Pour tous entiers $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, la loi conditionnelle de X_{n+m} , connaissant $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est la même que la loi conditionnelle de X_{n+m} connaissant X_n.

Les questions 2.1, 2.3, 3.1, 3.2, 3.3 peuvent se traiter indépendamment du reste du problème.

- Partie 1 -

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, on pose $\pi_{n,i} = P(X_n = a_i)$

1.1 - Pour tous $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, déterminer la loi du couple (X_n, X_{n+m}) en fonction des paramètres $\pi_{n,i}$ et $p_{i,j}^{(m)}$.

1.2 - a) Pour tous $(m,n,\ell) \in \mathbb{N}^3$, et pour tous $(i,j,k) \in \{1, 2, \ldots, r\}^3$, calculer $P(X_n = a_i, X_{n+m} = a_j, X_{n+m+\ell} = a_k)$.

b) Que représente le produit $p_{ij}^{(m)} p_{jk}^{(\ell)}$?

1.3 - Montrer que l'on a, pour tous $(m,\ell) \in \mathbb{N}^2$ et $(i,k) \in \{1, 2, \ldots, r\}^2$

$$p_{ik}^{(m+\ell)} = \sum_{j=1}^{r} p_{ij}^{(m)} p_{jk}^{(\ell)} .$$

T.S.V.P.

- Partie 2 -

Pour tout entier m, on définit la matrice $(r \times r)$:

$$A_{(m)} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(m)} & p_{12}^{(m)} & \cdots & p_{1r}^{(m)} \\ p_{21}^{(m)} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ p_{r1}^{(m)} & \cdots & \cdots & p_{rr}^{(m)} \end{pmatrix}$$

2.1 - Montrer que la somme des éléments d'une ligne quelconque de $A_{(m)}$ est égale à 1.

2.2 - Montrer que, pour tous $(m,\ell) \in \mathbb{N}^2$,

$$A_{(m+\ell)} = A_{(m)}\, A_{(\ell)} .$$

En déduire une expression de $A_{(m)}$ à l'aide de $A_{(1)}$ et de m .

2.3 - On pose $A_{(1)} = A$; pour tout $(i,j) \in \{1, 2, \ldots, r\}^2$, on simplifie la notation $p_{ij}^{(1)}$ en posant $p_{ij} = p_{ij}^{(1)}$.

a) Montrer que le vecteur
$(1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^r$
est vecteur propre de A. Quelle est la valeur propre associée ?

b) Soit λ une valeur propre de A, réelle ou non, et soit
$V = (x_1, \ldots, x_r)$ un vecteur propre associé à λ, non nul.
Soit $a = \sup |x_i|$, $i \in \{1, \ldots, r\}$. Il existe $i_0 \in \{1, \ldots, r\}$ tel que $|x_{i_0}| = a > 0$.
Montrer que :

$$|\lambda - p_{i_0 i_0}| \leq \sum_{\substack{i \in \{1,2,\ldots r\} \\ i \neq i_0}} p_{i_0 i} .$$

c) En déduire à l'aide de (2.1), que toute valeur propre de A est de module au plus égal à 1.

- Partie 3 -

Dans cette partie, on suppose l'existence d'un système physique dont les positions à l'instant n , X_n , vérifient les conditions exposées dans la partie 1 avec $r = 4$, la matrice A définie dans la partie 2 étant :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'objet de cette partie est de déterminer le comportement du système en fonction de sa position initiale lorsque $n \to +\infty$.

3.1 - Déterminer, sans calcul de déterminants, les valeurs propres de A. Quelle est la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre + 1 ? A est-elle diagonalisable ?

3.2 - Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.3 - Déterminer la matrice (4x4) B , dont les coefficients sont les limites des coefficients de la matrice A^n lorsque $n \to +\infty$.

3.4 - En étudiant les coefficients de B , déterminer le comportement du système lorsque $n \to +\infty$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail